La matematica in Francia nel periodo tra le due guerre

Ancora a Dieudonné ricorriamo per introdurre un breve resoconto sulla situazione matematica in Francia, che assieme al caso Polacco, farà da sfondo alle vicende italiane. Diceva Dieudonné: «Dopo il 1918, la Francia – la cui gioventù scientifica è stata dissanguata dall'ecatombe, si rinchiuderà in se stessa per dieci anni e, con l'eccezione di E. Cartan e di Hadamard, la scuola matematica francese si limiterà al dominio ristretto della teoria delle funzioni di variabile reale o complessa, il cui sviluppo considerevole, intorno al 1900, era stato d'altronde dovuto a molti suoi rappresentanti (Picard, Hadamard, E. Borel, Baire, Lebesgue. e poi Montel, Denjoy, Julia). La Germania, al contrario, che ha saputo conservare meglio la vita dei suoi scienziati, conserva intatte le sue tradizioni di universalità; vede inoltre schiudersi una notevole scuola di Algebra e di Teoria dei numeri – E. Noether, Siegel, Hecke, E. Artin, Krull, R. Brauer, Hasse, van der Waerden (di origine olandese) – che inaugura la tendenza assiomatica già in nuce nei lavori di Dedekind e di Hilbert. Tra il 1920 e il 1933, questi matematici assicurano alle Università tedesche, dove accorrono studenti di tutti i paesi (specialmente i giovani francesi che vanno lì a riannodare tradizioni dimenticate nel loro Paese), uno splendore e un fascino eccezionali, disgraziatamente spezzati dall'ascesa hitleriana. Bisognerà attendere fino al 1950 circa perché la scuola tedesca si ricostituisca, influenzata questa volta (con un curioso rovesciamento di posizione) dai matematici francesi di tendenza «bourbakista ».
Analogo, ma più esplicito, il giudizio di André Weil[1]: «L'Italia, un tempo sede di una fiorente scuola matematica, sembra caduta in uno stato di sclerosi, analoga a quello che minaccia la Francia, ma che avuto lì effetti ancora più pronti e più produttivi». È da simili costatazioni che nasce l'avventura "bourbachista".
Possiamo dunque riassumere entrambe le citazioni col dire che dopo aver vissuto, tra Otto e Novecento, un'epoca d'oro, la matematica francese negli anni trenta è in crisi. Il fatto che Henri Poincaré, genio incontrastato della matematica mondiale nella seconda metà dell'Ottocento, non abbia fatto scuola, la rigidità delle istituzioni pubbliche, un finanziamento nel dopoguerra insufficiente, sono alcune delle cause che determinano questa crisi o, se non si vuole usare questo termine, una stagnazione che non corrispondeva all'altezza di un passato eccellente. Questo il senso almeno della denunzia vigorosa che André Weil ne fece nel 1938[2], in cui criticava con veemenza i "pontefici" della scienza francese, "estranei ai grandi problemi, alle idee vive della scienza della loro epoca". Molti dei futuri boubarchisti, tra cui lo stesso Weil, completeranno i loro studi all'estero e molti di loro resteranno affascinati dal testo del matematico olandese van der Waerden "Moderne algebra". La cosiddetta algebra moderna influenzerà non poco il trattato di Bourbaki tanto che in seguito gli fu attribuita una sorta di "algebrizzazione dell'analisi".

André Weil e Bourbaki: la nascita di un mito

Diciamolo subito: Nicolas Bourbaki non è il nome di un matematico, ma quello di un gruppo di matematici, quasi tutti francesi. Ancora attivo, il gruppo – composto da una dozzina di membri – non è ancora conosciuto dal largo pubblico, sebbene negli annni dal 1950 al 1970 abbia cambiato l'aspetto della matematica.

---

[1] Cfr. A. Weil, L'avenir des mathématiques (1947) in A. Weil, *Oeuvres Scientifiques*, Springer-Verlag, New York, 1980, t. I, pp. 359-372 (370-71). È significativo il fatto che quando nel 1928 Weil si laurea con una tesi di Teoria dei numeri, non c'era in Francia alcun serio specialista della materia.
[2] Cf. A.Weil, *Oeuvres Scientifiques*, op. cit., t. I, pp. 232-235, e t. II, pp. 97-109.

Bourbaki non inventato tecniche nuove e rivoluzionarie né dimostrato teoremi grandiosi (ciò che non costituiva il suo obiettivo). Attraverso i suoi imponenti *Éléments de mathématiques* ha sostanzialmente imposto una visione nuova della matematica, una profonda riorganizzazione e chirificazione del suo contenuto, una terminologia e delle notazioni ben poste, uno stile particolare.
Assieme agli *Éléments*, la fama del gruppo è legata alla eccezionale qualità dei suoi membri: André Weil (1906-1998), figura centrale e – come vedremo – fondatore del gruppo, è stato uno dei matematici più grandi di questo secolo. I suoi complici, Henri Cartan e Claude Chevalley, erano di statura internazionale. Ad essi si aggiungeranno via via altri matematici prestigiosi: Laurent Schwartz, Alexandre Grothendieck, Jean Pierre Serre ecc., matematici i cui risultati hanno ottenuto importanti riconoscimenti internazionali. Alcuni di essi li si trova impegnati nella politica o in filosofia (Chevalley, Schwartz, Grothendieck e Roger Godement). Infine, negli anni '60 Bourbaki fu al centro, volente o nolente, di una riforma ambiziosa dell'insegnamento della matematica alle superiori sulla quale si sono versati fiumi d'inchiostro.

La nascita del gruppo

Oggi Nicolas Bourbaki ha più di settanta anni, l'età in cui anche i matematici vanno di solito in pensione. È difficile sapere se l'interessato sia d'accordo. Alcuni sostengono che sia morto già da qualche anno, altri che sia in coma profondo e altri ancora che ha fatto il suo tempo. L'aria di mistero che ha sempre cicondato Bourbaki impedisce di dare risposta sicura alla domanda sul suo stato di salute: fin dalla sua nascita le informazioni sono sempre state scarse, se si eccettuano i volumi del suo monumentale trattato.
Henri Cartan così riferiva a Marian Schmidt l'origine del gruppo[3]:

> Io e André Weil nel 1934 eravamo entrambi all'Università di Strasburgo. Io discutevo spesso con lui sul corso di calcolo differenziale e integrale che dovevo insegnare. Allora, la licenza di matematica prevedeva tre esami: fisica generale, calcolo differenziale e integrale, meccanica razionale. Cioè, c'era un solo esame di matematica [...].Occorreva perciò metterci tante cose e io mi interrogavo spesso sul modo di tenere quell'insegnamento, dal momento che le opere esistenti non mi sembravano soddisfacenti, per esempio riguardo alla teoria degli integrali multipli e alla formula di Stokes. Ne discussi perciò molto, a più riprese, con André Weil. Un bel giorno mi disse: «Ora, basta; occorrerebbe mettere una buona volta tutto quanto a posto, scrivere un buon trattato di analisi e non parlarne più!».

André Weil, nella sua autobiografia, conferma il ricordo di Henri Cartan[4]:

> A Strasburgo ritrovai Henri Cartan e ripresi il corso di "calcolo differenziale e integrale" del quale eravamo incaricati insieme; [...] Il libro di testo tradizionalmente adottato per questo insegnamento, il volume di Goursat, ci pareva sempre più inadeguato. Senza tregua Cartan mi domandava quale fosse a mio avviso la maniera migliore di affrontare questo o quel capitolo del programma; avevo finito col soprannominarlo "il balivo indagatore". Anch'io, d'altra parte, non mi facevo scrupolo di ricorrere in ogni occasione ai suoi consigli. Una questione che lo preoccupava era stabilire a quale livello di generalità fosse opportuno trattare la formula di Stokes nel nostro corso.
> Questa formula, com'è noto, ha la forma seguente:
>
> $$\int_{\boldsymbol{b}(X)} \omega = \int_{X} \boldsymbol{d}\omega,$$

[3] In M. Mashaal (a cura di), Bourbaki. Une société secréte de mathématiciens, *Pour la Science*, fev.-mai 2000, pag 6.
[4] Cf. A. Weil, *Ricordi di apprendistato* (a cura di C. Bartocci), Torino, Einaudi, 1994, pp. 109-110.

> dove ω è una forma differenziale, $d\omega$ la sua "derivata", X un domnio di integrazione e b(X) il bordo di X. Nessuna difficoltà, in tutto questo, se per esempio X è l'immagine infinitamente differenziabile di una sfera orientata e ω è una forma a coefficienti infinitamente differenziabili; molti di questi casi particolari venivano trattati nei testi tradiizionali, in un modo però che ci lasciava assolutamente insodisfatti.
> Élie Cartan, nel suo volume sugli invarianti integrali, aveva messo in risalto, roprendendo Poincaré, l'importanza della formula di Stokes e aveva proposto di estenderne il dominio di validità. Da un punto di vista matematico la questione era assai profonda, ben più di quanto noi potessimo anche solo immaginare. Non solo aveva evidentemente a che fare con la teoria dell'omologia – e in particolare con i teoremi di De Rham, la cui importanza cominciava a delinearsi –, ma in seguito doveva spianare la strada prima alla teoria delle distribuzioni e delle correnti e infine a quella dei fasci. Per il momento, tuttavia, ciò che interessava Cartan e me era il nostro corso di Strasburgo. Un giorno d'inverno, sul finire del 1934, ebbi un'idea luminosa per porre fine ai quesiti del mio collega. «Siamo cinque o sei amici, – gli dissi più o meno –, tutti incaricati di questo stesso corso in varie università. Riuniamoci e sistemiamo questa faccenda una volta per tutte, così non mi assillerai più con le tue domande». Non sapevo che in quello stesso istante era nato Bourbaki.

Queste due citazioni concordano dunque nel fissare al 1934 l'atto di nascita di Bourbaki, anche se il dibattito Cartan-Weil può sembrare riduttivo riguardo alle ragioni profonde che hanno portato alla sua nascita e al suo sviluppo successivo. Per chiarirle occorre fare un passo indietro e accennare alla "Scuola Normale Superiore" di Parigi, che fu in qualche modo il luogo di formazione della maggior parte dei suoi fondatori.

La culla di Bourbaki: l'École Normale Supérieure

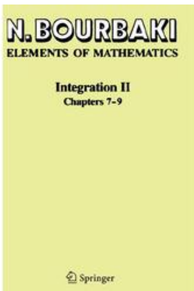
La "Scuola Normale Superiore" fu creata all'indomani della rivoluzione francese, nel 1794, con lo scopo di formare i docenti delle scuole secondarie sia delle discipline scientifiche sia di quelle umanistiche. Dopo appena un secolo, alla fine dell'Ottocento, questo scopo iniziale era di fatto dimenticato e da essa uscivano i ricercatori, i docenti universitari e non pochi dei grandi intellettuali francesi (Jean Paul Sartre e Georges Pompidou, per esempio). In concorrenza con l'altra grande *École*, quella Politecnica, è dalla "Scuola Normale Superiore" che sono usciti grandi matematici come Gaston Darboux, Émile Picard, Paul Painlevé, Jacques Hadamard, Élie Cartan, René Baire, Émile Borel, Henri Lebesgue (Henri Poincaré era però un "politecnico").
È dunque alla "Scuola Normale Superiore", che godeva all'epoca di grande prestigio e i cui allievi avevano piena libertà di studi, che si conoscono i cinque principali futuri "membri fondatori" di Bourbaki: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné e André Weil. Delsarte e Weil vi erano entrati nel 1922, Cartan nel 1923, Dieudonné nel 1924 e Chevalley nel 1926. Tutti quanti lasceranno Bourbaki al raggiungimento del limite d'età, fissato a cinqunt'anni.
Naturalmente altri matematici hanno accompagnato i primi passi di Bourbaki: dopo l'assemblea plenaria di fondazione del luglio 1935, nella quale si adottò il nome collettivo di Bourbaki, ai cinque appena nominati si aggiungono: Jean Coulomb, Charles Ehresmann, Szolem Mandelbrojt e René de Possel. Del gruppo dei nove, solo Mandelbrojt non era "normalista": originario della Polonia, si trovava a Parigi per il suo dottorato in matematica e dopo il 1929 aveva un incarico all'università di Clermont-Ferrand. Per quanto riguarda Coulomb, infine, più geofisico che matematico, lascerà il gruppo abbastanza presto (nel 1937).

Un progetto inizialmente modesto e poi faraonico

La prima riunione di lavoro si tenne il lunedì 10 dicembre 1934. Come s'è detto, il progetto iniziale era quello di scrivere un trattato di analisi che sostituisse nell'insegnamento superiore i manuali esistenti, chiaramente poco soddisfacenti (il più diffuso era quello di Édouard Goursat (1858-1936)). La riunione ebbe luogo a Parigi, all'ora di pranzo, in un "café" del Quartiere Latino, nei pressi dell'appena fondato "Istituto Poincaré". In una tavola del sotterraneo sedevano Cartan, Chevalley, Delsarte, Dieudonné, de Possel e Weil. Quasi tutti docenti in università periferiche – Cartan e Weil a Strasburgo, Delsarte a Nancy, Dieudonné a Rennes, de Possel a Clermont-Ferrand –, la loro presenza a Parigi era legata al "Seminario Julia" che si teneva nel pomeriggio (alle 16.30) il secondo e quarto lunedì di ogni mese proprio all'Istituto Poincaré.
Ci si può fare un'idea di ciò che si sono detti in base alla ricerca della storica canadese Liliane Beaulieu che ha avuto accesso ai verbali di quella riunione e delle successive[5].Secondo Weil, che sembra avere idee chiare sui motivi che hanno ispirato la riunione, si trattava di «fissare per 25 anni gli argomenti dell'esame di calcolo differenziale e integrale redigendo un manuale colletivo di analisi, il più moderno possibile». L'editore sarebbe stato Hermann, dal momento che Weil ne conosceva il responsabile editoriale (Enrique Freymann). L'idea di un trattato collettivo, attesa l'ampiezza degli argomenti da trattare, è sostenuta anche da Delsarte. Seguono discussioni animate sull'ampiezza del progetto (Cartan non crede di dover superare le 1000-1200 pagine) e sull'epoca di pubblicazione dei primi volumi (Delsarte propone non più di sei mesi per creare l'effetto sorpresa). Weil propone che dopo alcune riunioni preliminari, si creino delle sottocommissioni con l'incarico per ognuna di esse di elaborare un piano delle singole parti del trattato da discutere alla prossima riunione plenaria durante le vacanze estive e determinare così sia il piano definitivo sia la distribuzione delle singole parti. Naturalmente, la discussione sul contenuto e sulla forma del trattato sono rinviate a quella assemblea plenaria.
Così, il "Comitato di redazione del trattato di analisi", come si chiama Bourbaki nella sua fase iniziale, si riunisce dieci volte tra dicembre 1934 e maggio 1935, ogni due settimane, sempre il lunedì e sempre al "café **Capoulade**" come la prima volta. Già nel corso della seconda riunione, si conviene che il "Comitato" non avrebbe superato il numero di nove membri, regola che è stata rispettata solo all'inizio, sebbene il numero dei bourbakisti non abbia mai superato il numero di dodici. Prima dell'assemblea plenaria di fondazione dell'estate '35, già in gennaio erano stati cooptati Dubreil, Leray e Szolem Mandelbrojt (zio, quest'ultimo, di Benoit Mandelbrojt, futuro inventore dei "frattali"). Ma Dubreil e Leray rinunceranno all'mpresa prima dell'estate (sostituiti rispettivamente da Coulomb e Ehresmann), segnando così un'altra caratteristica del gruppo: arrivi e partenze si succederanno senza alcun cerimoniale variando continuamente la composizione del gruppo.
Riguardo al contenuto e alla natura del trattato, l'idea iniziale si trasforma presto in un progetto più ambizioso. Già nel corso della seconda riunione, Weil la formula nei termini seguenti: «Occorre fare un trattato utile a tutti: ai ricercatori, ai dilettanti, ai futuri insegnanti, ai fisici e a tutti i tecnici». Occorre dunque fornire ai potenziali lettori una raccolta di strumenti matematici «la più robusta e più universale possibile». Occorre perciò elaborare un progetto dettagliato che selezioni gli strumenti da presentare nel trattato, cercando di semplificarli e renderli generali. Ciò che mancava nei manuali classici, uno dei cui difetti era quello di «presentare i teoremi

[5] Cf. L. Beaulieu, A Parisian café and ten proto-Bourbaki meetings (1934-1944), *The Mathematical Intelligencer*, 15 1 (1993), pp. 27-35.

fondamentali con un lusso impressionante di precauzioni: le ipotesi richieste sono spesso sovrabbondanti».
L'elaborazione di un tale piano dettagliato è stata certamente molto più ardua del previsto, occupando diversi anni, ma si è rivelata un'idea molto feconda: a poco a poco, le molteplici riflessioni e le vivaci discussioni hanno evidenziato una nuova visione della matematica, un modo moderno di esporla, che i volumi successivi del trattato hanno materializzato e che in fin dei conti ha esercitato una grande influenza sulla comunità matematica (francese e internazionale).
Un primo piano globale fu stabilito nel corso dell'assemblea plenaria di fondazione che si tenne dal 10 al 17 luglio 1935 a Besse-en-Chandesse, un piccolo villaggio dell'Auvergne, a circa 40 km. da Clermont-Ferrand. I temi previsti erano ancora, in larga misura, quelli presenti nei manuali di analisi tradizionali: funzioni di variabile reale e complessa, integrali, equazioni differenziali e alle derivate parziali, funzioni speciali, ecc. Vi si aggiungevano però alcuni capitoli più astratti e moderni (ancora poco definiti nel contenuto): un po' di nozioni di algebra, di teoria degli insiemi e di topologia che il gruppo riteneva necessarie per una presentazione coerente del resto. Il tutto si valutava in più di 3.200 pagine, cioè il triplo di quanto previsto dal "Comitato" qualche mese prima.
Bourbaki, come si chiamò il gruppo (il nome Nicolas venne dopo), si pose un anno come scadenza della prima redazione completa. Obiettivo tutt'altro che raggiunto, ma il dado era tratto e il progetto messo in pista. Ciò naturalmnte non impedì esitazioni, dibattiti, marce indietro, rimesse in discussione, col risultato inevitabile di modifiche e raffinamento del progetto stesso. Così, nel corso degli anni successivi, la parte del "pacchetto astratto" è cresciuta continuamente, finendo col diventare la parte predominante del trattato e ritardando l'esposizione dei temi classici dell'analisi, relegati in secondo piano, sicché il termine di "Trattato di analisi" era divenuto privo di significato. Così, è col nome di *Elementi di matematica* – la rassomiglianza col volume di Euclide non è fortuita – che cominciò a pubblicarsi nel 1939 l'opera di Bourbaki.



Durante la seconda guerra mondiale, malgrado la dispersione dei membri, Bourbaki pubblicò tre altri volumi degli Elementi; numerosi altri seguirono nei decenni dal '40 al '70, con un ritmo sempre decrescente. Si pensi che l'ultimo fascicolo dei risultati è stato pubblicato nel 1998, quindici anni dopo l'uscita del precedente.
Oggi, gli *Elementi* di Bourbaki assommano circa 7.000 pagine, dense di definizioni, assiomi, lemmi, corollari e teoremi: per alcuni capitoli almeno, quelle pagine sono state un successo mondiale e hanno reso famoso il gruppo. Il successo e la celebrità sono dovuti esclusivamente al modo peculiare di vita e di lavoro dei suoi componenti. Se un trattato così voluminoso e influente ha potuto vedere la luce ciò non si deve solo al talento matematico degli autori, ma anche al loro entusiasmo, alla fiducia nell'impresa, alla loro amicizia e al loro modo di lavoro.

Bourbaki non ha gerarchie interne: tutte le decisioni sono prese all'unanimità. Non si vota, ma ognuno ha diritto di *veto*. Ciò riguarda in particolare la stesura delle diverse parti del "Trattato". La versione definitiva deve raccogliere l'unanimità, ciò che richiede a volte anni di lavoro. Particolare è anche la procedura di redazione dei testi: su un dato argomento se ne affida la prima stesura ad uno dei membri. Questa stesura è letta ad alta voce in uno dei congressi periodici, impietosamente criticata da tutti, per poi affidare ad un altro membro la seconda stesura. E cosi via finché si arrivi ad una versione approvata all'unanimità che sarà quella pubblicata.
L'assenza di gerarchie non significa che tutti i membri abbiano avuto lo stesso peso: alcuni hanno avuto maggiore influenza di altri. Così, per riconoscimento unanime, André Weil è ritenuto il leader del gruppo nel suo stadio iniziale. In un'altra fase, Jean Dieudonné ne è stato l'animatore vivace, mentre nelle sue fasi più recenti sono i nomi di Jean-Pierre Serre, Michel Demazure, Pierre Cartier e Jean-Louis Verdier a essere riconosciuti come motori del gruppo.

Il reclutamento

Bourbaki aveva anche un modo peculiare di reclutare i membri del gruppo destinati a supplire quelli che ne uscivano. Durante i congressi periodici, si invitano uno o due matematici a parteciparvi: quasi sempre di tratta di una futura recluta che in qualche modo si mette alla prova. Una volta individuato un giovane matematico promettente, diceva una volta Dieudonné[6], «la procedura consiste nell'invitarlo ad assistere a un congresso in qualità di cavia ["cobaye" in originale], è il metodo tradizionale. Sapete tutti cos'è un "cobaye", un porcellino d'India su cui si provano tutti i virus. Ebbene, è un po' così, il disgraziato è sottoposto al fuoco di fila delle discussioni Bourbaki e bisogna che non solo comprenda ma anche che intervenga. Se resta muto e silenzioso, è molto semplice, non sarà più invitato».
Dovendo il numero dei membri limitarsi a dodici, se si recluta è perché qualcuno è andato via. Le uscite sono talvolta dovute a dissensi più o meno seri sui metodi di lavoro o sulle scelte (è il caso dei già citati Dubreil e Leray). Qualche volta hanno influito anche questioni personali (com'è normale in ogni gruppo): si dice che René de Possel se ne sia uscito (lasciando la Francia nel 1942 per l'Algeria) perché nel 1937 la moglie Éveline aveva sposato André Weil. Ma la principale causa di uscita, lo si è già anticipato, è l'età: i membri Bourbaki si ritirano dal gruppo a 50 anni. La regola fu voluta da Weil e pronunciata quando i membri fondatori avevano raggiunto quell'età. Al congresso estivo del 1956, tenuto a Sallières-les-Bains (nella Drôme), Henri Cartan – alla fine del pranzo che festeggiava il compleanno di Dieudonné – lesse una lettera di Weil dagli Stati Uniti che proponeva l'uscita progressiva dei membri fondatori in base alle due seguenti considerazioni:
– 1.: «il numero dei partecipanti ai congressi diviene talvolta molto elevato per un lavoro produttivo»;
– 2.: «i membri fondatori sono "più eguali degli altri" e perciò nelle discussioni generali i membri inferiori si ritengono dispensati dall'assumersi le loro responsabilità fino in fondo».
Ragioni senza dubbio molto valide, ma probabilmente ve n'era un'altra inespressa e largamente condivisa dalla maggioranza, la convinzione cioè che è in gioventù che un matematico è più brillante e fecondo. Dieudonné ha detto una volta che «un matematico che ha superato 50 anni può ancora essere un buon matematico, ancora

---

[6] In M. Mashaal, cit., p. 13.

produttivo, ma è raro che riesca ad adattarsi alle idee nuove, alle idee di persone più giovani di lui di 25 o 30 anni. Ora, un'impresa come Bourbaki la si vuole permanente»[7].

Così, attorno alla metà degli anni '50, la maggior parte dei membri fondatori di Bourbaki sono usciti dal gruppo e nel corso degli anni successivi la regola è stata rispettata senza alterare i rapporti personali. Per esempio, ogni ex-bourbakista continuerà a ricevere *La Tribu*, il bollettino interno che fornisce i resoconti dei congressi.

In più di settanta anni di esistenza del gruppo, una quarantina circa di matematici, quasi tutti francesi o dell'area francofona, ne hanno fatto parte: fra essi, l'americano di origine polacca Samuel Eilenberg (creatore con Saunders MacLane della teoria delle “categorie”), che ha collaborato con Bourbaki per una quindicina d'anni (fino al 1966), l'americano di origine svizzera Armand Borel (membro per vent'anni, fino al 1973) e l'americano di origine francese Serge Lang. Naturalmente, anche ottimi matematici francesi non sempre sono stati membri di Bourbaki: si è già citato il caso di Jen Leray, cui aggiungiamo ora quelli di René Thom (medaglia Fields nel 1958), creatore della “teoria delle catastrofi”, e di André Lichnerowicz. Comunque, i matematici di Bourbaki erano ottimi o eccellenti matematici. Ben cinque di essi hanno ottenuto la medaglia Fields: Laurent Schwartz nel 1950, Jean-Pierre Serre nel 1954, Alexandre Grothendieck nel 1966, Alain Connes nel 1982 e Jean-Christophe Yoccoz nel 1994.

Approfittando dell'autobiografia del primo di essi, daremo fra poco, l'interessante resoconto del suo incontro con Boubaki, per il momento chiudiamo questa sezione con l'accennare alla “Associazione dei collaboratori di Nicolas Bourbaki”.

L'associazione fu costituita il 30 agosto 1952 come struttura ufficiale del gruppo per gestire i suoi problemi pratici, specialmente gli aspetti finanziari. La sua prima sede fu nell'abitazione di Jean Delsarte (4 rue de l'Oratoire) a Nancy. Nel 1966 la sede fu trasferita a Parigi, dapprima nel domicilio di Jean-Pierre Serre e successivamente (1972) all'École Normale (45 rue d'Ulm). Data la natura dell'Associazione, interfaccia amministrativa col mondo esterno, sarebbe vano cercare nei suoi statuti le regole particolari che hanno scandito la vita di Bourbaki: il segreto sull'appartenenza, l'unanimità delle decisioni, il ritiro a cinquant'anni, il reclutamento ecc. Sono tutti elementi protettivi. Così, per esempio, il famoso trattato doveva essere redatto in comune in modo tale che nessun membro si mettesse particolarmente in luce e nessuno doveve sapere chi si occupava di qualche argomento in particolare. Per questo i vari volumi saranno firmati da un unico autore, Nicolas Bourbaki. La scelta della segretezza doveva inoltre garantire al gruppo una certa tranquillità nel suo lavoro e proteggere gli individui da eventuali personalità influenti, ma ostili al progetto. Va infatti ricordato che i primi bourbakisti erano giovani matematici di punta, tutti intorno ai trent'anni, per molti versi in contrasto o, almeno, devianti rispetto all'*establishment* accademico dell'epoca.

Laurent Schwartz: Il mio incontro con Bourbaki

Come si è anticipato, molti bourbakisti, tutti ottimi o eccellenti matematici, sono stati anche personalità forti o grandi intellettuali. Basti qui citare i casi di Alexandre

[7] In M. Mashaal , cit., p. 14.

Grothendieck e di Laurent Schwartz, del quale presenteremo la versione di cosa abbia rappresentato per lui l'"avventura bourbakista".
Grothendieck è un matematico di genio, medaglia Fields nel 1966 per i suoi eccezionali contributi alla geometria algebrica, disciplina che com'è noto ha come punto di partenza lo studio delle soluzioni dei sistemi di equazioni polinomiali e che ha molteplici legami con la Teoria dei numeri e altri campi della matematica. A dispetto della comunità scientifica, verso la quale le sue critiche si facevano via via più violente, questo eccezionale ricercatore ha tagliato improvvisamente nel 1970 i suoi legami con la ricerca per militare nel movimento ecologico e vivere un'esistenza isolata da qualche parte del sud della Francia.
Per il grande pubblico non matematico, Laurent Schwartz (anch'egli normalista) è forse conosciuto non già per la creazione (1944) della teoria delle distribuzioni (una specie di funzioni generalizzate che svolgono una funzione importante nello studio delle equazioni alle derivate parziali) ma per la sua ricca attività politica e pubblica relativa alla guerra d'Algeria, al Viet Nam, ai matematici dissidenti sovietici ecc., attività descritta con rara lucidità critica nella sua autobiografia: *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Paris, Odile Jacob, 1997. Proprio dalla sua autobiografia prendiamo le mosse per descrivere il suo incontro con Bourbaki (p. 158 e sgg.):

> Gli spazi vettoriali topologici cui allora [1940] mi interessavo erano per me una assoluta novità poiché avevo sempre ragionato sul "piano" e sullo "spazio", quello a tre dimensioni in cui viviamo, senza osare abbordare gli spazi di dimensione 4. Incontrai ora gli spazi vettoriali topoligici nella loro generalità, una delle prime conoscenze trasmessemi da Bourbaki. Dieudonné teneva proprio un corso su essi alla Facoltà di Scienze [di Clermont-Frrand]. Marie-Hélène [sua moglie, figlia di Paul Lévy], anch'essa interessata all'argomento, lo seguì per entrambi[8] recandosi una o due volte la settimana a Clermont-Ferrand. Al ritorno, mi metteva al corrente del contenuto.
> Due anni dopo, le nozioni apprese da Dieudonné mi servirono per la mia tesi di dottorato. I grandi teoremi della teoria: teorema di Hahn-Banach, teorema di Banach-Steinhaus, teorema di Baire, insiemi limitati e intorni, duale, biduale e riflessività, per non parlare di teoremi più fini, sono stati per me dei grandi strumenti per le future distribuzioni. *A posteriori*, mi rendo conto che si trattava di una teoria facile, oggi banale, ma allora era per me del tutto nuova. Non feci male ad assimilarla, aiutandomi con i libri presi in prestito dalla Facoltà, specialmente quello di Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation* [Teoria e applicazione della trasformazione di Laplace] e quello di Kakzmark-Steinhaus, *Orthogonale Reihen* [Serie ortogonali]. Apprendevo una quantità i risultati che alla Normale mi erano stati presentati monchi. Rivestiva allora tutto il suo pieno valore. Se ho difficoltà a vedere nello spazio a tre dimensioni, sono al contrario a mio agio negli spazi a dimensione infinita, perché qui non c'è bisogno di vedere.
> Bourbaki fu per me una rivelazione. [...] La matematica fu ripresa dai fondamenti e fissata solidamente al metodo assiomatico. Per definire un oggetto, si definiscono gli assiomi da verificare e non l'oggetto stesso. Si definiscono così i gruppi, gli anelli, i corpi, gli spazi vettoriali, topologici, metrici, uniformi. Poi i gruppi topologici, gli spazi vettoriali topologici, le varietà topologiche, le varietà differenziali, gli spazi fibrati... Qualsiasi problema si sa così incasellare nella relativa classe assiomatica. Ecco un esempio semplice, rappresentato dai due teoremi di Cauchy per le funzioni reali continue sulla retta:
> 1) ogni funzione reale continua sulla retta ammette su un intervallo chiuso e limitato un massimo e un minimo;
> 2) ogni funzione reale continua sulla retta non può passare da un valore all'altro senza assumere tutti i valori intermedi.
> Tutta la struttura della retta figura nell'enunciato dei due teoremi che corrispondono però a due strutture parziali completamente diverse della retta:
> i) ogni funzione continua su un compatto ammette massimo e minimo. Ora, si trova che un segmento chiuso e limitato della retta è un compatto;
> ii) ogni funzione continua reale su un connesso non può passare da un valore all'altro senza assumere tutti i valori intermedi. La retta è uno spazio topologico connesso.

[8] Schwartz era allora sotto le armi.

Ogni teorema si colloca dunque nel quadro delle generalità corrispondenti alla struttura in cui si trova. La distinzione delle moltissime strutture è una delle grandi innovazioni di Bourbaki. Quando un insieme è munito di diverse strutture, queste verificano – le une rispetto alle altre – determinate condizioni. Così uno spazio vettoriale topologico ha da un lato la struttura di spazio vettoriale e, dall'altro, quella topologica; entrambe devono verificare, una rispetto all'altra, determinate condizioni: le operazioni di spazio vettoriale devono essere continue per la topologia.
Dopo il mio incontro con Bourbaki ho preso l'abitudine di determinare, all'inizio di ogni ricerca, la struttura in cui la valutavo. Come mostrano i due teoremi di Cauchy, non è normale enunciare un teorema sulla retta reale se l'enunciato fa intervenire solo una parte della struttura della retta reale. Tutti i matematici hanno ormai adottato questo modo di ragionare. I diversi libri di Bourbaki corrispondono allo studio delle diverse strutture che possono possedere gli oggetti matematici. Esiste perciò un libro sugli spazi vettoriali topologici, un altro sui corpi commutativi ecc. Ogni struttura è interamente caratterizzata dai suoi assiomi. Ciò permette una classificazione dei diversi oggetti matematici ognuno rispetto agli altri. Ci si libera inoltre naturalmente dei vincoli stupidi che esistevano prima. Io ne ho tratto una soddisfazione intensa.
Anche il linguaggio diviene estremamente chiaro. Sono scomparsi i romanzi cui somigliavano i libri della “Collezione Borel”. La redazione si avvicinò al modello tedesco. I modelli di redazione sono variati nel tempo e hanno subito diverse trasformazioni. All'inizio, fu il matematico (o gruppo di matematici) greco Euclide a riorganizzare del tutto la geometria grazie ad una teoria più o meno assiomatica e a una redazione estremamente precisa. I saggi dei matematici greci sono scritti con una precisione infinitamente più elevata di quelli della Collezione Borel o di Lebesgue o quelli del XVII e XVIII secolo. Un testo di Archimede (greco di Sicilia) è limpido come l'acqua. I lemmi, teoremi, corollari si seguono in un ordine impeccabile e si riferiscono l'uno all'altro senza alcuna ambiguità.
Una seconda riforma dello stesso genere ebbe luogo nel XIX secolo. La matematica, all'inizio di quel secolo, aveva perduto ogni rigore. Si manipolavano serie senza senza sapere bene se erano convergenti o divergenti (vedere, per es., Fourier!) e, se c'era convergenza, non si precisava mai se era uniforme. Si usavano inoltre funzioni continue senza possederne le proprietà né talvolta la definizione. Si definivano gli infinitesimi senza sapere sempre ciò di cui si parlava. Lo stesso Cauchy, nel suo corso all'École polytechnique del 1821 «dimostra» che la somma di una serie convergente (semplicemente) di funzioni continue è continua. Malgrado un controesempio pubblicato da Abel nel 1826, lo ripeterà nel 1833. La maggior parte dei grandi matematici del XIX secolo hanno riflettuto sulle nozioni fondamentali dell'analisi, ma il rigore universale non fu affatto acquisito prima dell'ultimo quarto del secolo. Sono soprattutto Cauchy in Francia e Weierstrass in Germania che lo generalizzarono. Cauchy impose, quasi battendo sulle dita dei matematici, un'espressione e un linguaggio assolutamente rigorosi. Quando assisteva ai corsi di grandi e noti matematici, questi tremavano di paura per le molteplici osservazioni che faceva loro sullo stile, la redazione, il rigore e finanche sui concetti. Gli infinitesimi furono uno degli ostacoli del XVIII e XIX secolo. È Cauchy che mise ordine sull'argomento ed è il suo corso di analisi del 1821 (malgrado alcuni errori) che ne sarà il capolavoro. La necessità di aggiungere l'insegnamento alla ricerca fu lo sprone di tale trasformazione. Oggi, ci si deve piuttosto battere per aggiungere la ricerca all'insegnamento.
Il celebre Lagrange aveva proprio scritto un trattato sulle «derivate, senza infinitesimi» in cui s'era incredibilmente sbagliato (occorreva, dopo, proprio un Cauchy). Egli definiva così la derivata f'(x) della funzione f nel punto x: si consideri f(x+h), la si sviluppi (che vuol dire?); si trovi una serie secondo le potenze intere di h (*sic*); il coefficiente di h in questa serie è f'(x). Un tale sviluppo in serie esiste solo se f è un polinomio, perché la serie ha un numero finito di termini non nulli, o una funzione analitica (oggetto sconosciuto ai tempi di Lagrange; in questi casi, e solo in essi, è allora esatto che si trovi così la derivata. Lagrange aggiungeva, con una ingenuità inaudita: «Mi si potrà obiettare che lo sviluppo potrebbe contenere potenze frazionarie di h. Ma ciò è impossibile, perché una radice di un numero reale ha sempre parecchi valori complessi!». Dimenticando d'un colpo che lavorava su funzioni reali di variabile reale che non forniscono in generale, ciò che è più grave, sviluppo alcuno. È vero tuttavia che la teoria recente dell'analisi non standard di Robinson ha introdotto di nuovo gli infinitesimi, analoghi all'intuizione degli analisti anteriori a Cauchy. La riforma di Cauchy fu fondamentale, ma non dello stesso grado di quelle di Euclide e di Bourbaki.
La terza riforma è quella bourbakista: le matematiche sono scritte come non lo erano mai state prima. Non si fa più riferimento a ciò che è stato «detto prima», ma ad un teorema o ad un corollario precisi. Ciò contribuisce a stabilire una certa loro unità. I ragionamenti sono i medesimi in tutte le discipline. Le matematiche precedenti erano divise in diversi capitoli, slegati gli uni dagli

altri, secondo regole del tutto arbitrarie. Ora, al contrario, molte teorie matematiche riposano prima di tutto, per esempio, sulla nozione di spazio vettoriale topologico. E differiscono solo dopo.

Si può confrontare la classificazione matematica di Bourbaki all'immensa rivoluzione introdotta da Linneo con il suo *Systema naturae* del 1758, nella classificazione dei viventi, animali e vegetali. Tipi, classi, ordini, famiglie, generi, specie, sottospecie, che permettono a ogni grado di collocare un essere determinato, succedono al cafarnao che regnava fra gli animali e i vegetali. Il tipo dei vertebrati comprende cinque classi: mammiferi, uccelli, rettili, batraci, pesci. Un tempo si consideravano le balene come pesci perché vivevano nell'acqua. Ora, la sua struttura profonda fa della balena un mammifero e non un pesce. Lo studio delle balene si farà dopo su tale base. La balena non ha peli, contrariamente agli altri mammiferi, ma i pesci hanno squame. Lo scheletro dei mammiferi, presentando sempre trentatre vertebre, differisce da quello dei pesci. La balena ha polmoni e respira aria, il pesce ha branchie e respira acqua. I pesci depongono le uova e non si occupano della loro progenitura, generalmente divorandola; le femmine di balena assicurano la gestazione dei loro piccoli e li allattano. La classificazione linneana situa la balena nel tipo dei vertebrati, nella classe dei mammiferi, nell'ordine dei cetacei. I cetacei comprendono diverse famiglie, la balena corrisponde a un genere determinato, che contiene diverse specie di balene. Il *Systema naturae* di Linneo, pubblicato nella sua decima edizione nel 1758, classifica bene le balene nei mammiferi, mentre Daubenton ancora nel 1753 le metteva nella classe dei pesci. Analogamente, il pipistrello non è un uccello, ma un mammifero insettivoro. La classificazione ne viene facilitata. Così il leone: tipo dei vertebrati, classe dei mammiferi, ordine dei carnivori, famiglia dei felini, genere *Panthera*, specie *Panthera leo*. La tigre divide questa classificazione fino al genere *Panthera*, ma appartiene alla specie *Panthera tigris*. Il gatto è *Felis felis*, il puma è *Felis puma*. Il cane, che divide questa classificazione vertebrato, mammifero, carnivoro, si apparenta alla famiglia del genere *Canis*, è *Canis domesticus*, mentre il lupo è *Canis lupus*. Bourbaki è il Linneo delle matematiche.

Le teorie matematiche procedono più per intersezioni che per linee verticali. Gli spazi vettoriali topologici sono all'incrocio della categoria degli spazi vettoriali e di quella degli spazi topologici che, come s'è già detto, sono collegate. Alcune strutture sono molto povere, come per esempio quella di spazio topologico, che non ha altro che una topologia che permette di studiare le applicazioni continue, gli aperti, i chiusi ... Ma la struttura «gruppo di Lie» è molto ricca. Un gruppo di Lie è da un lato munito della stuttura di gruppo e, dall'altro, di quella di varietà differenziale, che è essa stessa una struttura molto ricca, e le operazioni di gruppo devono essere differenziabili per la struttura differenziale. Le strutture più ricche sono quelle generalmente più interessanti da studiare. (...)

Se si volesse condensare in poche battute i punti centrali del “programma bourbachista”, si potrebbe dire che esso ruota attorno ai tre capisaldi dichiarati negli Élements del 1939: il metodo assiomatico, le strutture formali e l'idea dell'unità sostanziale della matematica (“noi crediamo che l'evoluzione interna della matematica abbia, malgrado le apparenze, rinserrato più che mai l'unità delle sue diverse parti”). Non erano idee nuove, ma è certamente il gruppo bourbachista che se ne è fatto a gran voce promotore e sicuramente la comunità matematica mondiale è stata permeata da questa visione della matematica almeno per il venticinquennio successivo alla seconda guerra. E non solo la comunità matematica. Il gruppo *Oulipo* in letteratura (creato da Raymond Queneau e François Le Lionnais nel 1960), lo strutturalismo di Levi-Strauss in psicologia e le teorie pedagogiche di Jean Piaget sono alcuni esempi di applicazione del concetto di struttura formale ad altri campi del sapere.